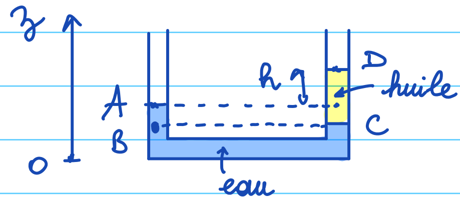
TD M1

SF1



C et B appartiennent au m̂ fluide et sont à la même altitude.

Donc $P_C = P_B$

Par ailleurs, on a $P_A = P_{atm}$ et $P_B = P_A + \rho_{eau}\,(z_A - z_B)$

et $P_D = P_{atm}$ et $P_C = P_D + \rho_h\,(z_D - z_C)$

Ainsi $\rho_{eau}\,(z_A - z_C) = \rho_h\,(z_D - z_C)$

On a un volume $V = 3\,mL$ d'huile, donc $(z_D - z_C) = \frac{V}{S}$ où $S = 1\,cm^2$

Par ailleurs, $(z_A - z_C) + h = z_D - z_C = \frac{V}{S}$

Ainsi $\rho_{eau}\left(\frac{V}{S} - h\right) = \rho_h \frac{V}{S}$

Au final $\boxed{h = \left(1 - \frac{\rho_h}{\rho_{eau}}\right)\frac{V}{S}}$ AN $= \left(1 - \frac{800}{1000}\right) \times \frac{3.10^{-6}}{1.10^{-4}}$

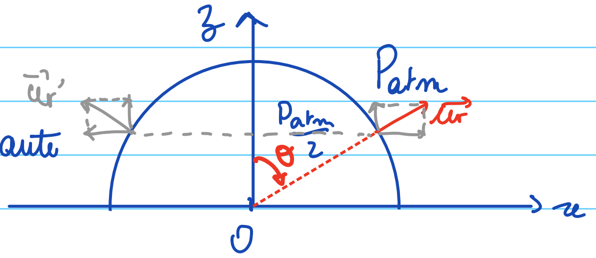
$= 0,2 \times 3.10^{-2} = 6.10^{-3}\,m$

$= \underline{6\,mm}$

SF2

cf cours.

Surface sphérique



On peut considérer la pression constante sur l'échelle ventouse:

On se place en coordonnées sphériques. On a une symétrie par rapport à tous les plans contenant O, $\vec{u_r}$ et $\vec{u_z}$

On a donc $\vec{F}_{pext} = - F_{pext}\, \vec{u_z}$

et $\vec{F}_{pint} = F_{pint}\, \vec{u_z}$

Calculons F_{pext} : $F_{pext} = \vec{F}_{pext} \cdot \vec{u_z}$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} P_{atm}\, r\, d\theta\, r\sin\theta\, d\varphi\, \vec{u_r} \cdot \vec{u_z}$$

θ ↗ ↖ φ

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} P_{atm}\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \cos\theta$$

$$= 2\pi P_{atm} R^2 \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta\, d\theta$$

$$= 2\pi P_{atm} R^2 \left[\frac{1}{2} \sin^2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$\underline{F_{pext} = \pi P_{atm} R^2}$$

De même, $\underline{F_{pint} = \pi \frac{P_{atm}}{2} R^2}$

Au final $\vec{F}_{res} = \vec{F}_{pint} + \vec{F}_{pext} = +\pi \frac{P_{atm}}{2} R^2 \vec{u_z} - \pi P_{atm} R^2 \vec{u_z}$

$$\boxed{\vec{F}_{res} = -\frac{\pi}{2} P_{atm} R^2 \vec{u_z}}$$

Exercice 3

1) On s'intéresse à la masse accrochée au ressort dans le réf. terrestre supposé galiléen. On prend un axe z ascendant.
La masse est d'abord soumise à :

* son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_z}$
* la force de rappel du ressort : $\vec{F} = k\Delta l\,\vec{u_z}$

Si on applique le PFD à la masse, on a

$$-mg + k\Delta l_0 = 0 \quad \text{ie} \quad \boxed{\Delta l_0 = \frac{mg}{k}}$$

2) Une fois le liquide inséré, la masse est soumise à

* son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_z}$
* la force de rappel $\vec{F} = k\Delta l\,\vec{u_z}$
* la force pressante de l'air $\vec{F_{air}} = -P_{atm}S\vec{u_z}$
* la force pressante du liquide $\vec{F_{liq}} = PS\vec{u_z}$

A l'équilibre, on a $-mg + k\Delta l - P_{atm}S + PS = 0$

$$\text{ie} \quad k\Delta z = (P - P_{atm})S$$

3) On a $P = P_{atm} + \rho g(h - \Delta z)$

$$\text{Donc} \quad k\Delta z = \rho g(h - \Delta z)S \quad \text{ie} \quad \boxed{\rho = \frac{k\Delta z}{g(h - \Delta z)S}}$$

4) A.N. $$\rho = \frac{30 \times 1.\cancel{10^{-2}}}{(10{,}7 - 1).\cancel{10^{-2}} \times \pi\left(\frac{2.10^{-2}}{2}\right)^2 \times 10} \simeq \underline{10^3\ kg.m^{-3}}.$$

Exercice 4

1) On s'intéresse au bouchon, dans le réf. terrestre supposé galiléen
On prend un axe z ascendant.
Le bouchon est soumis à :

* son poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u_z} = \rho h_0 S g \vec{u_z}$
* la poussée d'Archimède $\vec{\Pi_A} = -\rho_0 z S g \vec{u_z}$

avec S la surface supérieure du bouchon.

A l'équilibre $\rho h_0 S g - \rho_0 z S g = 0$

ie $\boxed{z = \frac{\rho}{\rho_0} h_0}$

2) On ajoute une force $\vec{F}$ sur le bouchon pour le maintenir entièrement sous l'eau.
On a alors

* $\vec{P'} = \rho h_0 S g \vec{u_z}$
* $\vec{\Pi'_A} = -\rho_0 h_0 S g \vec{u_z}$
* $\vec{F} = F\vec{u_z}$

et $\vec{P} + \vec{\Pi_A} + \vec{F} = \vec{0}$

$/\vec{u_z}$: $S g h_0 (\rho - \rho_0) + F = 0$

$\boxed{F = S g h_0 (\rho_0 - \rho)}$

3) On a le même bilan des forces qu'en 1), on applique maintenant le PFD hors équilibre :

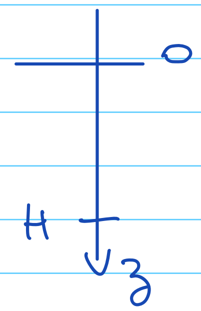
$$m\vec{a} = Sg(\rho h_0 - \rho_0 z)\vec{u_z}$$

$/\vec{u_z}$: $m\ddot{z} = Sg\left(\rho \times \frac{\rho_0}{\rho} z_{éq} - \rho_0 z\right)$ où $z_{éq}$ est la position d'éq. trouvée en 1)

$$\boxed{\ddot{z} + \underbrace{\frac{Sg\rho_0}{m}}_{= \omega_0^2} z = \frac{Sg\rho_0}{m} z_{éq}}$$

ED d'un OH de période $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{Sg\rho_0}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho h_0}{\rho_0 g}}$

Exercice 5 (pistes)



* pression : $P(z) = P_0 + \rho g z$ (axe descendant)

* volume : $V = \dfrac{nRT}{P}$

Donc $\quad \dfrac{4}{3}\pi r^3(z) = \dfrac{nRT}{P(z)}$

et $\quad n = \dfrac{P(z_0)\,\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d_0}{2}\right)^3}{RT}$ $\qquad z_0 = 100\ m \qquad d_0 = 1\ cm$

Donc $\quad \left(\dfrac{d(z)}{2}\right)^3 = \dfrac{P(z_0)\left(\frac{d_0}{2}\right)^3}{P(z)}$

$$d(z) = d_0\left(\frac{P(z_0)}{P(z)}\right)^{1/3} = 10^{-2} \times \left(\frac{10^5 + 10^3 \times 10^2 \times 10}{10^5}\right)^{1/3}$$

$$= 0{,}02\ m = \underline{2\ cm}\ .$$

Exercice 6

1) cf cours $p = \frac{\rho R T}{M_{air}}$

2) La loi de Laplace indique $p^{1-\gamma} T^{\gamma} = cte$

Donc $\forall z$, $p(z)^{1-\gamma} \, T(z)^{\gamma} = p_0^{1-\gamma} \, T_0^{\gamma}$

3) On a $\frac{d}{dz}\left(p^{1-\gamma} T^{\gamma}\right) = 0$

ie $(1-\gamma)\frac{dp}{dz} p^{-\gamma} T^{\gamma} + p^{1-\gamma} \gamma \frac{dT}{dz} T^{\gamma-1} = 0$

$$(1-\gamma)\frac{dp}{dz} \times T + \gamma p \frac{dT}{dz} = 0$$

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{T} \frac{dT}{dz}$$

$\frac{p}{T} \to \frac{\rho R}{M_{air}}$

Donc $\boxed{\frac{dT}{dz} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{M_{air}}{\rho R} \frac{dP}{dz}}$

4) $\frac{dT}{dz} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{M_{air}}{\rho R} \times (-\rho g)$ (axe ascendant)

$= -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{M_{air}}{R} g$

Donc $T(z) = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{M_{air}}{R} g \times z + T_0$

On peut poser $\frac{T_0}{H} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{M_{air}}{R} g$ et alors $T(z) = T_0\left(1 - \frac{z}{H}\right)$.

5) $p = p_0 \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = p_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\gamma/\gamma-1}$ et $\rho = \frac{M_{air} p}{R T}$

Donc $\rho(z) = \frac{M_{air}}{R} \times p_0 \times \frac{T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}-1}}{T_0^{\gamma/\gamma-1}} = \underline{\frac{M_{air}}{R T_0} p_0 \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}$

6) $\frac{dT}{dz} = \underline{-9{,}8.10^{-3} \text{ K.m}^{-1}}$ et $\underline{H = 30 \text{ km}}$

Exercice 7 (pistes et réponses)

1) Cours $\Rightarrow P(y) = P_0 - \rho g (y - h)$

2) $P_h = P(y=0) = P_0 + \rho g h$. côté eau et $P_a = P_0$ côté air

On considère une surface dS de la plaque. Elle subit une résultante élémentaire $d\vec{F_h}$ horizontale

$\Rightarrow d\vec{F_h} = -\rho g h \, dx dz \, \vec{e_y}$

(on a $\underline{\underline{d}}\vec{F}$ car on regarde la force subie par une petite surface)

Donc $\underline{\vec{F_h} = -\rho g h \, ab \, \vec{e_y}}$

• Calcul du moment :

$$\mathcal{M}_h = \int_0^a \int_0^b (\vec{OM} \wedge d\vec{F_h}) \cdot \vec{e_z}$$

point "courant" de l'intégrale : $\vec{OM} = x \, \vec{e_x}$

$$= \int_0^a \int_0^b -x \rho g h \, dx dz$$

$$= \int_0^a -x \rho g h b \, dx = \underline{-\rho g h \frac{ba^2}{2}}.$$

3) Même raisonnement : $d\vec{F_v} = -(P_0 + \rho_0 g (h - y)) \, dz \, dy \, \vec{e_x} + P_0 \, dz \, dy \, \vec{e_x}$

$$= \rho g (y - h) \, dz \, dy \, \vec{e_x}$$

Donc $\vec{F_v} = \int_0^h \int_0^a \rho g (y - h) \, dz dy \, \vec{e_x} = -\rho g b \frac{h^2}{2} \vec{e_x}$

$$\mathcal{M}_v = \int_0^a \int_0^h \left((y \vec{e_y} + z \vec{e_z}) \wedge \rho g (y - h) \, dz \, dy \, \vec{e_x} \right) \cdot \vec{e_z}$$

$$= \int_0^a \int_0^h -\rho g (y - h) y \, dz \, dy = \rho g b \frac{h^3}{6}.$$

4) Il y a basculement si $\mathcal{M}_h + \mathcal{M}_v \geqslant 0$ ie $\underline{h \geqslant a\sqrt{3}}$.
(rotation ds le sens direct)